

ZUR PRAKTISCHEN DURCHFÜHRUNG DER WÄRMELEITFÄHIGKEITSMESSUNG MIT DER KUGELSONDE

HANS ROHATSCHKE

Institut für Physik, Johannes-Kepler-Universität, A-4045 Linz, Österreich

(Received 18 September 1975)

Zusammenfassung—Die Auswertung von Messungen der Wärmeleitfähigkeit körniger Medien mittels einer kugelförmigen Sonde wird auf die Bestimmung der Parameter linearer Funktionen zurückgeführt. Diese graphisch oder numerisch auszuführende Methode hat gegenüber den bisherigen komplizierten Verfahren die Vorteile leichter Handhabung und erhöhter Genauigkeit, sie ermöglicht eine bessere Beurteilung von Meßfehlern und Abweichungen von theoretischen Annahmen und ihre Grundlagen sind leichter mitzuteilen.

Eine realisierte Kugelsonde wird beschrieben und es werden Meßbeispiele diskutiert.

BEZEICHNUNGEN

- a , Temperaturleitfähigkeit $\lambda/c\rho$ [m^2/s];
- c , spezifische Wärmekapazität [$\text{J}/\text{kg K}$];
- $c\rho$, Wärmekapazität pro Volumen [$\text{J}/\text{m}^3 \text{K}$];
- d , effektive Korngröße;
- p , Exponent (20);
- r , Radius der Kugeloberfläche, in welcher der Heizleiter liegt;
- s , Bogenlänge des Heizleiters;
- t , Zeit [s];
- t_1 , Zeit, bei welcher $\tau(t_1) = 1$;
- t^* , reduzierte Zeit (7) [dimensionslos];
- t_1^* , reduzierte Zeit, bei welcher $\tau(t_1) = 1$;
- z , Cartesische Koordinate;
- A , Fläche einer Kugelzone;
- C , Wärmekapazität der Sonde [J/K];
- K , Konstante (27);
- Q , in der Sonde entwickelte Joulesche Wärmeleistung [W];
- R , Außenradius der Sonde [m];
- α , besonderer Wert von ε ;
- β , $4\pi R\lambda/C$ (2);
- ε , Koordinate auf der Kugel ("Breite");
- ϑ , Temperatur der Sonde (Differenz gegen den Anfangswert) [K];
- ϑ_∞ , Endtemperatur;
- ϑ^* , reduzierte Temperatur (8) [dimensionslos];
- κ , $C/4\pi R^3 c\rho$ (3);
- λ , Wärmeleitfähigkeit [$\text{W}/\text{m K}$];
- ξ , Integrationsvariable;
- ρ , Dichte [kg/m^3];
- τ , transformierte abhängige Variable (16);
- ϕ , Koordinate auf der Kugel ("Länge");
- ψ , Substitution für ε (35);
- ω , transformierte abhängige Variable (15).

1. EINLEITUNG

ZUR MESSUNG der Wärmeleitfähigkeit von schlecht leitenden Pulvern oder Böden (Feuchtigkeitsbestimmung) wurde von Huber und anderen die Methode der Kugelsonde vorgeschlagen [1-3], eine instationäre

Methode, die folgendermaßen durchgeführt wird:

Mitten in dem sich genügend weit erstreckenden zu prüfenden Stoff befindet sich eine Kugel aus gut wärmeleitendem Material, die mit gemessener konstanter Leistung elektrisch geheizt wird. Der zeitliche Verlauf der Sondentemperatur, Resultat des Zusammenwirkens von Wärmezufuhr und Ableitung von Wärme in das Medium, wird gemessen und mit theoretischen Funktionen verglichen. Die Methode gestattet die gleichzeitige Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit λ und der volumenbezogenen Wärmekapazität $c\rho$, bzw. der Temperaturleitfähigkeit a .

Bisher krankte die Methode an ihrer komplizierten mathematischen Gestalt: Die Auswertung wurde mit Hilfe von Netztafeln vorgenommen, die ungünstig mitzuteilen, schwerfällig im Gebrauch und wenig genau sind. Ferner wurden zur Bestimmung der zwei unabhängigen Parameter λ und $c\rho$ (oder a) jeweils nur zwei Meßwertepaare von Zeit und Temperatur herangezogen, d.h. gerade so viele, als nötig sind. Um Fragen der Streuung oder des Erfülltseins theoretischer Voraussetzungen beantworten zu können, braucht man aber überschüssige Meßwerte.

Im folgenden werden Maßnahmen angegeben, durch die zwei Forderungen erfüllt werden können:

I. Die durch Messungen gewonnenen Temperatur-Zeit-Funktionen sollen nicht nur an zwei Punkten, sondern in ihrem ganzen Verlauf mit theoretischen Funktionen verglichen werden;

II. Die Variablen sollen so transformiert sein, daß sie durch lineare Funktionen zusammenhängen.

Dies erleichtert die Auswertung vor allem auf graphischem Weg oder durch lineare Ausgleichsrechnung und erhöht die Genauigkeit erheblich.

2. THEORIE

In der Ausgangssituation befinden sich das allseits unendlich ausgedehnte Medium und die unbeheizte Sonde der Wärmekapazität C auf einheitlicher Temperatur $\vartheta = 0$. Vom Beginn der Zeitählung $t = 0$ an wird ihr eine konstante Wärmeleistung Q zugeführt.

Die Wärmeleitfähigkeit innerhalb der Kugel ist so hoch, daß sie selbst keine Temperaturunterschiede aufweist.

Der zeitliche Verlauf der Sondentemperatur gehorcht folgendem Gesetz [1, 2] Abb. 1):

$$\vartheta(t) = \frac{Q}{C} \cdot \frac{1}{\beta} \left\{ 1 - \frac{2}{\pi \sqrt{\kappa}} \int_0^\infty \frac{e^{-\beta t \xi^2} d\xi}{\xi^4 + [(1/\kappa) - 2] \xi^2 + 1} \right\} = \vartheta(t; \beta, \kappa). \tag{1}$$

Die beiden Parameter haben die Bedeutung

$$\beta = \frac{4\pi R \lambda}{C}, \tag{2}$$

$$\kappa = \frac{C}{4\pi R^3 c\rho}; \tag{3}$$

κ ist ein Drittel des Verhältnisses der Wärmekapazitäten der Sonde, C , und einer gleich großen Kugel aus dem umgebenden Stoff, $4\pi R^3/3 \cdot c\rho$.

Der Anfangsanstieg ist

$$\dot{\vartheta}(0) = \frac{Q}{C}, \tag{4}$$

die asymptotisch erreichte Endtemperatur

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vartheta(t) = \vartheta_\infty = \frac{Q}{C\beta} = \frac{Q}{4\pi R \lambda}, \tag{5}$$

im übrigen ist der Verlauf je nach κ , bzw. $c\rho$ verschieden. Mit abnehmendem $c\rho$ nähern sich die Kurven der Grenzkurve

$$\vartheta(t) = \vartheta_\infty (1 - e^{-\beta t}) \text{ für } c\rho = 0, \quad \kappa = \infty. \tag{6}$$

Es liegt nahe, reduzierte dimensionslose Variable gemäß den Definitionen

$$t^* = \beta t = \frac{4\pi R \lambda}{C} t, \tag{7}$$

$$\vartheta^* = \frac{\vartheta}{\vartheta_\infty} = \frac{C\beta}{Q} \vartheta = \frac{4\pi R \lambda}{Q} \vartheta \tag{8}$$

einzuführen [2, 4].

In den reduzierten Variablen erhält der Temperaturverlauf die Gestalt (Abb. 1):

$$\vartheta^*(t^*) = 1 - \frac{2}{\pi \sqrt{\kappa}} \int_0^\infty \frac{e^{-t^* \xi^2} d\xi}{\xi^4 + [(1/\kappa) - 2] \xi^2 + 1} = \vartheta^*(t^*; \kappa). \tag{9}$$

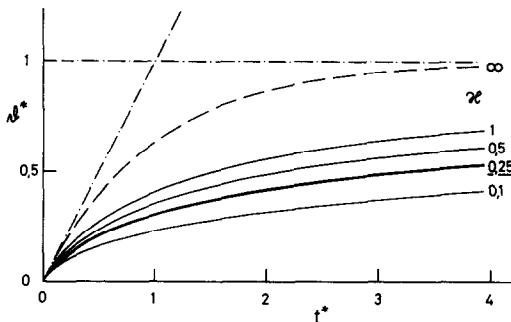


ABB. 1. Reduzierte Temperatur $\vartheta^* = 4\pi R \lambda / Q \cdot \vartheta$ als Funktion der reduzierten Zeit $t^* = 4\pi R \lambda / C \cdot t$.

Dies ist nur mehr eine einparametrische Schar. Mathematisch ausgezeichnet ist der Spezialfall $\kappa = 1/4$:

$$\vartheta^*(t^*; \frac{1}{4}) = 1 - \frac{4}{\pi} \int_0^{t^*} \frac{e^{-\xi^2} d\xi}{(\xi^2 + 1)^2} = 1 + e^{t^*} (2t^* - 1) \operatorname{erfc}(t^*)^{\frac{1}{2}} - 2 \left(\frac{t^*}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{10}$$

wobei

$$1 - \operatorname{erfc} x = \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi. \tag{11}$$

Aus den Kurven $\vartheta^* = \vartheta^*(t^*)$ entstehen die Kurven $\vartheta = \vartheta(t)$ durch Streckung um den Faktor $t/t^* = 1/\beta$ in Abszissenrichtung und um den Faktor $\vartheta/\vartheta^* = Q/C\beta$ in Ordinatenrichtung.

3. AUSWERTEMETHODE

Die Aufgabe besteht in der Ermittlung der Größen λ und $c\rho$, bzw. a . Man erhält sie durch Auflösung von (2) und (3), wenn die Parameter β und κ bestimmt sind:

$$\lambda = \frac{C}{4\pi R} \beta, \tag{12}$$

$$c\rho = \frac{C}{4\pi R^3} \cdot \frac{1}{\kappa}, \tag{13}$$

$$a = R^2 \beta \kappa. \tag{14}$$

Eine prinzipiell mögliche Lösung des Problems, die auch der Forderung I genüge, ginge so vor sich: Man ermittelt den Zusammenhang zwischen der gemessenen Kurve $\vartheta = \vartheta(t)$ und der vorausgerechneten Kurvenschar $\vartheta^* = \vartheta^*(t^*; \kappa)$, beide in gleichen doppeltlogarithmischen Diagrammen dargestellt (Die zwei entsprechenden Kurven sind um die Logarithmen der in (7), (8) angegebenen Faktoren gegeneinander verschoben): Der Parameter der kongruenten Kurve der Schar gibt κ , aus dem Abstand beider folgt β . Dieses Verfahren wäre aber nicht praktisch.

Einen Schritt näher zu einer brauchbaren Lösung kommt man durch Benützung der Variablen [2]

$$\omega = \frac{\vartheta^*}{t^*} = \frac{C}{Q} \cdot \frac{\vartheta}{t}, \tag{15}$$

die unmittelbar aus den Meßwerten berechnet werden kann. Abbildung 2 zeigt die einparametrische Schar $\omega = \omega(t^*; \kappa)$.

$\omega(t)$ geht aus $\omega(t^*)$ durch Streckung in Abszissenrichtung um den Faktor $1/\beta$ hervor. Hier könnte man eine der vorhin erwähnten ähnliche, etwas günstigere Auswertemethode anknüpfen: Man vergleicht die empirische Funktion $\omega = \omega(t)$ mit der nach (9) und (15) berechneten Schar $\omega = \omega(t^*; \kappa)$, beide in Diagrammen mit logarithmischer Zeiteinteilung dargestellt. Die Strecke, um welche $\omega(t)$ in Abszissenrichtung verschoben werden muß, um mit einer Kurve der Schar $\omega(t^*)$ zur Deckung zu kommen, gibt β , der Parameter der passenden Kurve ist κ . Auch dieses Verfahren ist schwerfällig und von zweifelhaftem Wert.

Das angestrebte Ziel II, lineare Funktionen zu erhalten, läßt sich durch eine neuerliche Transformation der abhängigen Variablen näherungsweise

erreichen. Die Transformation wird so angesetzt, daß eine mittlere Kurve der Schar exakt zur Geraden wird. Dafür wurde die Kurve mit dem Parameter $\kappa = 1/4$ ausgewählt: Sie ist mathematisch durch Einfachheit ausgezeichnet (10) und liegt auch mitten in einem κ -Bereich, der praktisch in Frage kommt.

Tabelle 1. $\tau(\omega)$, die Umkehrfunktion von

$$\omega = \frac{1}{\tau} \left[1 + e^{(2\tau - 1) \operatorname{erfc} \tau^{\frac{1}{2}}} - 2 \left(\frac{\tau}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

ω	τ	ω	τ	ω	τ
0,100	5,9574	0,300	0,9945	0,500	0,2701
0,105	5,5735	0,305	0,9609	0,505	0,2615
0,110	5,2268	0,310	0,9286	0,510	0,2531
0,115	4,9122	0,315	0,8976	0,515	0,2449
0,120	4,6257	0,320	0,8677	0,520	0,2370
0,125	4,3639	0,325	0,8390	0,525	0,2293
0,130	4,1238	0,330	0,8114	0,530	0,2218
0,135	3,9029	0,335	0,7848	0,535	0,2146
0,140	3,6991	0,340	0,7592	0,540	0,2075
0,145	3,5107	0,345	0,7345	0,545	0,2007
0,150	3,3359	0,350	0,7107	0,550	0,1940
0,155	3,1735	0,355	0,6877	0,555	0,1876
0,160	3,0222	0,360	0,6656	0,560	0,1813
0,165	2,8810	0,365	0,6442	0,565	0,1752
0,170	2,7491	0,370	0,6236	0,570	0,1693
0,175	2,6254	0,375	0,6037	0,575	0,1636
0,180	2,5094	0,380	0,5844	0,580	0,1580
0,185	2,4004	0,385	0,5659	0,585	0,1526
0,190	2,2978	0,390	0,5479	0,590	0,1473
0,195	2,2011	0,395	0,5306	0,595	0,1422
0,200	2,1099	0,400	0,5138	0,600	0,1373
0,205	2,0236	0,405	0,4975	0,605	0,1325
0,210	1,9421	0,410	0,4818	0,610	0,1278
0,215	1,8648	0,415	0,4666	0,615	0,1232
0,220	1,7916	0,420	0,4519	0,620	0,1188
0,225	1,7220	0,425	0,4377	0,625	0,1145
0,230	1,6560	0,430	0,4239	0,630	0,1104
0,235	1,5932	0,435	0,4106	0,635	0,1063
0,240	1,5334	0,440	0,3976	0,640	0,1024
0,245	1,4764	0,445	0,3851	0,645	0,0986
0,250	1,4221	0,450	0,3730	0,650	0,0949
0,255	1,3703	0,455	0,3612	0,655	0,0913
0,260	1,3209	0,460	0,3498	0,660	0,0878
0,265	1,2736	0,465	0,3387	0,665	0,0844
0,270	1,2284	0,470	0,3280	0,670	0,0811
0,275	1,1851	0,475	0,3176	0,675	0,0779
0,280	1,1437	0,480	0,3075	0,680	0,0749
0,285	1,1040	0,485	0,2978	0,685	0,0718
0,290	1,0660	0,490	0,2883	0,690	0,0689
0,295	1,0295	0,495	0,2791	0,695	0,0661

Die neue Variable τ (Tabelle 1) ist definiert durch

$$\tau(\omega) = t^*(\omega; \frac{1}{4}) \tag{16}$$

d.h. sie ist die Umkehrfunktion von $\omega = \omega(t^*; \frac{1}{4})$. Eine beliebige Funktion $\omega = \omega(t^*; \kappa)$ wird transformiert in

$$\tau = \tau[\omega(t^*; \kappa)] = \tau(t^*; \kappa). \tag{17}$$

Man kann sich diese Funktion (17) auch als Ergebnis einer Elimination von ω aus der Parameterdarstellung

$$\begin{cases} t^* = t^*(\omega; \kappa) \\ \tau = \tau(\omega; \frac{1}{4}) \end{cases} \tag{18}$$

denken, wie in Abb. 2 angedeutet.

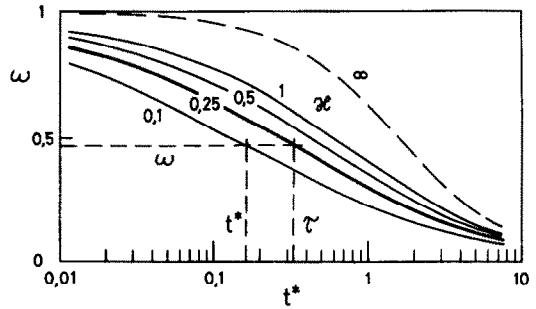


Abb. 2. Die Hilfsgröße $\omega = \vartheta^*/t^*$ als Funktion der reduzierten Zeit t^* . Definition der Variablen τ .

Definitionsgemäß gilt für den ausgewählten "mittleren" Parameterwert $\kappa = \frac{1}{4}$:

$$\tau(t^*; \frac{1}{4}) = t^*. \tag{19}$$

Bemerkenswerterweise stellt sich bei numerischer Ausrechnung heraus, daß für benachbarte κ in sehr guter Näherung die Darstellung gilt:

$$\tau(t^*; \kappa) = \left(\frac{t^*}{t_1^*} \right)^p, \tag{20}$$

in logarithmischer Schreibweise

$$\log \tau = p(\log t^* - \log t_1^*). \tag{21}$$

Dies ist nun die gewünschte Schar linearer Funktionen (Abb. 3). Es ist eine einparametrische Schar, denn der Potenzexponent p und t_1^* —jene reduzierte Zeit, für welche $\tau(t_1^*) = 1$ ist—sind Funktionen von κ (Tabelle 2).

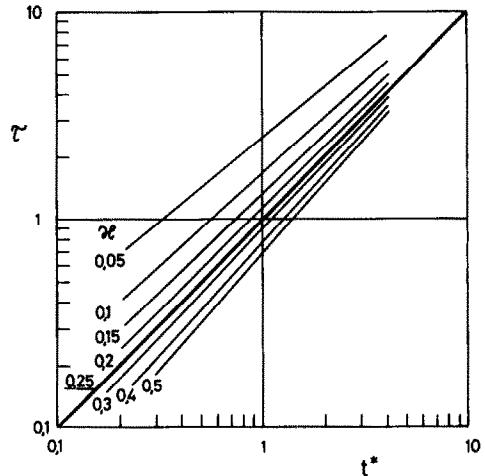


Abb. 3. Die Variable τ als Funktion der reduzierten Zeit t^* , lineare Abschnitte.

Dieses Ergebnis (21) ist der Angelpunkt der hier vorgeschlagenen Methode zur Versuchsauswertung. Ihr Anwendungsbereich umfaßt mindestens die Intervalle

$$\kappa = 0,05 \dots 0,50$$

$$t^* = 0,25 \dots 4,00$$

und reicht, wie im nächsten Kapitel gezeigt wird, für praktische Anwendungen bei weitem aus, sofern die Sonde günstig dimensioniert ist.

Tabelle 2. p und t^* als Funktionen von κ

κ	p	t^*	κ	p	t^*
			0,25	1,0000	1,0000
			0,26	1,0055	1,0214
			0,27	1,0110	1,0418
			0,28	1,0163	1,0620
			0,29	1,0212	1,0812
0,05	0,8036	0,3234	0,30	1,0259	1,1004
0,06	0,8226	0,3772	0,31	1,0307	1,1187
0,07	0,8392	0,4274	0,32	1,0356	1,1363
0,08	0,8543	0,4746	0,33	1,0401	1,1537
0,09	0,8678	0,5188	0,34	1,0444	1,1705
0,10	0,8803	0,5606	0,35	1,0486	1,1869
0,11	0,8919	0,6001	0,36	1,0529	1,2029
0,12	0,9024	0,6376	0,37	1,0570	1,2183
0,13	0,9121	0,6730	0,38	1,0613	1,2335
0,14	0,9219	0,7071	0,39	1,0650	1,2484
0,15	0,9308	0,7393	0,40	1,0688	1,2629
0,16	0,9391	0,7703	0,41	1,0725	1,2771
0,17	0,9470	0,8001	0,42	1,0762	1,2909
0,18	0,9545	0,8286	0,43	1,0797	1,3043
0,19	0,9621	0,8558	0,44	1,0832	1,3174
0,20	0,9692	0,8820	0,45	1,0863	1,3306
0,21	0,9757	0,9073	0,46	1,0901	1,3429
0,22	0,9820	0,9318	0,47	1,0931	1,3556
0,23	0,9883	0,9554	0,48	1,0963	1,3678
0,24	0,9941	0,9782	0,49	1,0996	1,3796
0,25	1,0000	1,0000	0,50	1,1026	1,3914

Der Zusammenhang zwischen t^* und p , der in der Praxis gebraucht wird, könnte der Tabelle 2 entnommen werden. Für $p \geq 0,93$, entsprechend Werten des Parameters $\kappa = 0,15 \dots 0,50$, gilt indessen (mindestens promillegenaue) der einfache lineare Zusammenhang

$$t^* = 1 + 3,82(p - 1). \quad (22)$$

Substituiert man gemäß (7) für t^* die wahre Zeit t , bzw. deren Maßzahl $\{t\} = t/\text{Zeiteinheit}$, z.B. t/s , so erhält man aus (21)

$$\begin{aligned} \log \tau &= p(\log \beta t - \log \beta t_1) \\ \log \tau &= p(\log \{t\} - \log \{t_1\}), \end{aligned} \quad (23)$$

d.h. eine Abhängigkeit der Variablen τ von der wahren Zeit t , welche dieselbe Gestalt hat wie die von der reduzierten Zeit t^* .

Bei praktischen Problemen hat man also folgendermaßen vorzugehen:

Aus mehreren Meßwertepaaren t, ϑ bildet man die Größen

$$\omega = \frac{C}{Q} \cdot \frac{\vartheta}{t}$$

und daraus mit Hilfe von Tabelle 1

$$\tau[\omega(t)] = \tau(t).$$

Nach (23) müssen bei einwandfreiem Versuchsablauf die Meßpunkte in einem doppellogarithmischen $\tau-t$ -Diagramm auf einer Geraden liegen. Man bestimmt deren Steigung

$$\frac{d \log \tau}{d \log \{t\}} = p \quad (24)$$

und die Zeit t_1 , für welche $\tau(t_1) = 1$. Mit p erhält man

den Parameter κ (Tabelle 2) und weiters t^* , entweder aus (22) oder ebenfalls aus Tabelle 2.

Den konstanten Faktor β , um den sich wahre und reduzierte Zeit unterscheiden, bestimmt man mittels

$$\beta = \frac{t_1^*}{t_1}. \quad (25)$$

Sind nun κ und β bekannt, so errechnet man sofort die Wärmeleitfähigkeit λ (12), die volumenbezogene Wärmekapazität $c\rho$ (13) und die Temperaturleitfähigkeit a (14).

4. BAU UND EIGENSCHAFTEN DER SONDE

Roggen [2], der zuerst eine Kugelsonde ausführte, verwendete dünnwandige Messinghohlkugeln (Radius 23 mm, Wandstärke 1 mm), in deren Innerem sich die Heizwicklung und eine Flüssigkeit zur Wärmeübertragung (Petroleum oder Quecksilber) befanden. So ließ sich aber die Voraussetzung der Theorie, daß die ganze Kugel einheitliche Temperatur haben soll, nur schlecht erfüllen. Die Temperaturmessungen fanden zwischen 10 min und 60–100 min Versuchszeit statt. Bei einer typischen Heizleistung von 5 W betrug die Temperaturerhöhung 40–50 Grad.

Die hier beschriebene Sonde besteht aus einer dickwandigen Hohlkugel aus Messing, die aber leer ist (Radius 27 mm, Wandstärke 3 mm). Die Heizwicklung ist in die Kugelschale eingelassen. Auf diese Weise ist die Voraussetzung, daß sich die Wärme in der Sonde augenblicklich verteilt, zufriedenstellend erfüllt. Außerdem kann die Wärmekapazität der Kugel relativ klein gehalten werden. Dies begünstigt die Empfindlichkeit und verkürzt die Meßzeiten.

Zur Erwärmung dient ein Heizleiter Philips "Thermocoax", bestehend aus einer CrNi-Heizader, die, mit MgO isoliert, in einem CrNiFe-Mantel (Außendurchmesser 0,5 mm) liegt. Sein Widerstand beträgt etwa 40 Ω , die Länge etwa 800 mm. Anfang und Ende des Heizleiters liegen an demselben Pol, über die Kugel verläuft er entlang einer Linie, die aus zwei kongruenten, einander diametral gegenüber liegenden, am anderen Pol verbundenen Spiralen besteht. Diese Kurve ist im Interesse möglichst gleichförmiger Erwärmung besonders berechnet, und zwar derart, daß in flächengleichen Kugelzonen gleich lange Abschnitte des Leiters liegen (Herleitung im Anhang zu diesem Kapitel). Für seine Aufnahme wurde in die Wand der Kugel die doppelspiralförmige Nut geätzt, der Heizleiter eingelötet und die Kugel sauber überdreht.

Zur Messung der Temperatur der Sonde dient ein angelötetes Kupfer-Konstantan-Thermoelement mit Eisbad für die Bezugslötstelle und ein Lichtmarkengalvanometer kurzer Einstellzeit. Diese Anordnung wurde durch Vergleich mit Thermometern in kleinen Schritten auf genauer als 0,1°C kalibriert. Die Wärmekapazität der Sonde wurde aus dem Temperaturanstieg unter thermischer Isolierung bei gemessener Heizleistung bestimmt.

Die Daten der Kugelsonde betragen:

$$\text{Radius } R = 2,74 \cdot 10^{-2} \text{ m,}$$

$$\text{Wärmekapazität } C = 81,0 \text{ J/K.}$$

Bei diesen Dimensionen erhalten praktisch in Frage kommende Medien κ -Werte (3) etwa zwischen 0,20 und 0,35; dem den Rechnungen zugrunde gelegten zentralen Wert $\kappa = 0,25$ entspricht $c\rho = 1,25 \cdot 10^6$ J/m³ K (Tonboden, mäßig feuchter Sand).

Anhang: Zur Verlegung des Heizleiters

Da die Fläche einer Kugelzone

$$A = 2\pi r \cdot z \tag{26}$$

proportional ihrer Höhe z ist, läuft die Forderung eines konstanten Verhältnisses von Bogenlänge s und Zonenfläche A auf die Bedingung

$$\frac{ds}{dz} = K \tag{27}$$

hinaus.

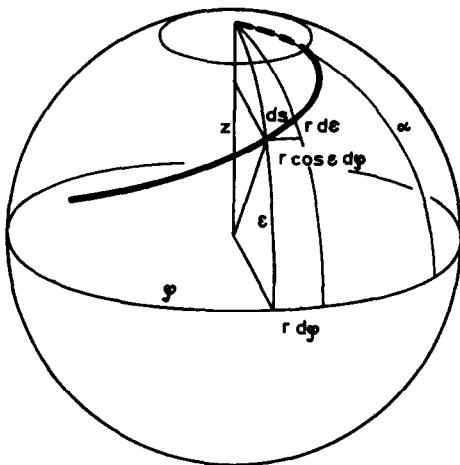


ABB. 4. Zur Verlegung des Heizleiters in der Kugelschale.

Es seien die Koordinaten auf der Kugel (Abb. 4) φ ("Länge") und ε ("Breite"), ferner r der Radius jener Kugelfläche, in welcher der Heizleiter liegt. Aus der Zeichnung entnimmt man

$$z = r \sin \varepsilon. \tag{28}$$

Anstelle von (27) kann man schreiben:

$$\frac{ds}{d\varepsilon} = \frac{ds}{dz} \cdot \frac{dz}{d\varepsilon} = K \cdot r \cos \varepsilon. \tag{29}$$

Das Linienelement in den Koordinaten φ, ε ist gegeben durch

$$ds^2 = r^2 \cos^2 \varepsilon d\varphi^2 + r^2 d\varepsilon^2, \tag{30}$$

$$\left(\frac{ds}{d\varepsilon}\right)^2 = r^2 \cos^2 \varepsilon \left(\frac{d\varphi}{d\varepsilon}\right)^2 + r^2. \tag{30'}$$

Aus (29) und (30') erhält man

$$\left(\frac{d\varphi}{d\varepsilon}\right)^2 = K^2 - \frac{1}{\cos^2 \varepsilon} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{1}{\cos^2 \varepsilon}. \tag{31}$$

Es muß nämlich immer

$$\frac{1}{\cos \varepsilon} \leq K \tag{32}$$

sein. Gleichheit gilt auf einem Breitenkreis $\varepsilon = \pm \alpha$, wobei $1/\cos \alpha = K$. Eine Lösung der gestellten Aufgabe gibt es also nur für

$$-\alpha \leq \varepsilon \leq \alpha. \tag{33}$$

Man erhält sie durch Ausführung des Integrals

$$\begin{aligned} \varphi &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{1}{\cos^2 \varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} d\varepsilon \\ &= \frac{1}{\cos \alpha} \int \frac{(\sin^2 \alpha - \sin^2 \varepsilon)^{\frac{1}{2}}}{\cos \varepsilon} d\varepsilon. \end{aligned} \tag{34}$$

Durch die Substitution

$$\sin \varepsilon = \sin \alpha \cdot \sin \psi \tag{35}$$

wird es übergeführt in

$$\varphi = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} \int \frac{\cos^2 \psi d\psi}{1 - \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \psi}. \tag{36}$$

Die Lösung durch den Punkt $\varphi = 0, \varepsilon = 0$ ist

$$\varphi = \frac{\psi}{\cos \alpha} - \arctan(\cos \alpha \cdot \tan \psi). \tag{37}$$

Sie existiert, wie bemerkt, zwischen den Breitenkreisen $\pm \alpha$, die man in der Nähe der Pole wählen kann (z.B. $\alpha \approx 82^\circ$). Die Kurve $\varphi = \varphi(\varepsilon)$ ist spiralenförmig, bei $\varepsilon = \pm \alpha$ tangiert sie den Meridian.

Zwischen $\varepsilon = \pm \alpha$ und den Polen $\varepsilon = \pm \pi/2$ ist die Aufgabe nicht lösbar. In der Praxis wird dort der Leiter entlang eines Meridians verlegt: $ds = r d\varepsilon$.

Seine gesamte Länge errechnet sich zu

$$\begin{aligned} s &= \int ds = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{ds}{d\varepsilon} d\varepsilon \\ &= 4 \left(\frac{r}{\cos \alpha} \int_0^{\alpha} \cos \varepsilon d\varepsilon + r \int_{\alpha}^{\pi/2} d\varepsilon \right) \\ &= 4r \left(\tan \alpha + \frac{\pi}{2} - \alpha \right). \end{aligned} \tag{38}$$

5. EXPERIMENTE

Zur Überprüfung der Methode wurden Versuche mit trockenem Sand ausgeführt. Die Kugel lag in der Mitte eines Gefäßes von 20 l Inhalt.

Ein typisches Beispiel:

$$Q = 4,67 \text{ W}, \quad \omega = 17,34 \text{ } \vartheta/\text{t}$$

t [s]	ϑ [K]	ω	τ
0	0		
100	3,75	0,650	0,095
125	4,45	0,617	0,121
160	5,35	0,580	0,158
200	6,35	0,550	0,194
250	7,35	0,510	0,254
320	8,7	0,471	0,325
400	10,1	0,438	0,403
500	11,5	0,398	0,519
630	13,1	0,360	0,664
800	14,9	0,323	0,850
1000	16,65	0,289	1,08
1250	18,4	0,255	1,37
1600	20,45	0,221	1,77
2000	22,3	0,193	2,23
2500	24,1	0,167	2,82
3200	25,95	0,141	3,68
4000	27,65	0,120	4,63

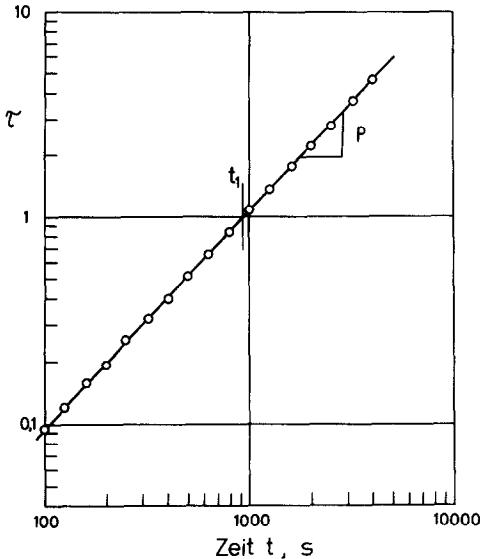


ABB. 5. Messung an trockenem Sand.

Im doppeltlogarithmischen τ - t -Diagramm (Abb. 5) liegen die Meßpunkte sehr genau auf einer Geraden, (21) ist also erfüllt. Man entnimmt die Steigung $p = 1,053$ und den Achsenabschnitt $t_1 = 932$ s. Aus p folgen die Größen $t_1^* = 1,204$ und $\kappa = 0,36$. Damit erhält man das Resultat

$$\begin{aligned}\lambda &= 0,303 \text{ W/mK,} \\ cp &= 8,69 \cdot 10^5 \text{ J/m}^3 \text{ K,} \\ a &= 3,49 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s.}\end{aligned}$$

Eine Serie von 13 Versuchen an demselben Material mit Leistungen Q zwischen 1,6 und 6,7 W ergab für λ eine Standardabweichung der Einzelmessung von 4,0% und eine Standardabweichung des Mittelwertes $\lambda = 0,298$ W/mK von 1,1%.

Läuft, wie hier beim Sand, der Versuch den theoretischen Erwartungen gemäß ab, so reichten auch wesentlich kürzere Versuchszeiten zur Bestimmung der Parameter aus—etwa 5 min, je nach der Methode der Temperaturmessung. Die Temperatursteigerung könnte dann unter 10 Grad bleiben und es würde auch eine viel geringere Substanzmenge genügen.

Ein Gegenbeispiel liefern Messungen an einem körnigen Handelsdünger (Abb. 6): Die Meßpunkte liegen hier nicht durchwegs auf einer Geraden, d.h. der Temperatur-Zeit-Verlauf folgt nicht dem zugrunde gelegten Gesetz.

Die Ursache ist wahrscheinlich eine Abweichung von der vorausgesetzten Homogenität des Mediums. Entlang der glatten Oberfläche der Sonde sind die Körner anders angeordnet als inmitten des Gutes; so kann es dort zu anomalen thermischen Stoffwerten kommen, die innerhalb einer "Grenzschicht" von der Größenordnung des Korndurchmessers in die normalen Werte übergehen.

Eine Lösung des sphärischen Wärmeleitungsproblems für den Fall einer konzentrischen Schicht mit anderen Eigenschaften liegt nicht vor. Ein ähnliches Problem wurde aber bereits für eine eindimensionale Anordnung behandelt [5, Abschnitt 4.41], nämlich für den Fall eines ausgedehnten Mediums, wenn zwischen diesem und der Heizung eine Lage mit abweichenden

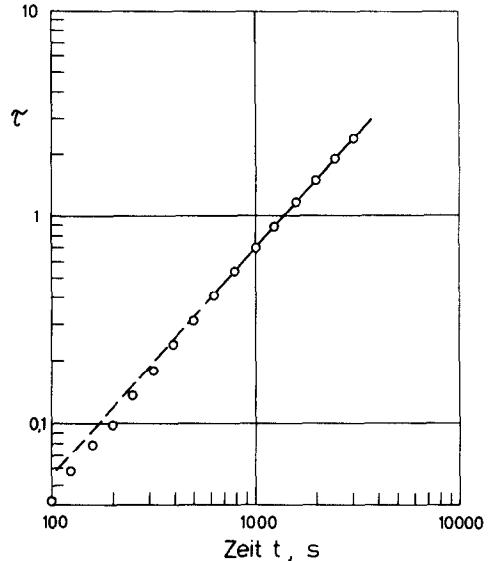


ABB. 6. Messung an einem körnigen Handelsdünger.

Wärmeleiteigenschaften liegt: Mit zunehmender Zeit geht der von der Schicht beeinflusste Temperaturverlauf in jenen über, welcher bei ihrer Abwesenheit einträte.

Bei der Kugel kann man erwarten, daß der Einfluß der "Grenzschicht" auf den Temperaturverlauf ebenfalls mit der Zeit abnehmen und schließlich unmerklich sein wird, wenn die Versuchszeit groß gegenüber einer charakteristischen Zeit d^2/a wird (d , effektive Korngröße).

In dieser Hinsicht unterscheiden sich die beiden untersuchten Materialien beträchtlich: Natürlicher Sand hat ein breites Größenspektrum, die meisten Körner messen einige Zehntel Millimeter; der Dünger dagegen besteht hauptsächlich aus runden Granula zwischen 2 und 4,5 mm, der Feinanteil ist gering.

Setzt man zur Abschätzung $a = 3 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, so beträgt d^2/a für $d = 3$ mm (Dünger) 30 s, für $d = 0,3$ mm (Sand) nur 0,3 s. Damit in Übereinstimmung steht der reguläre Temperaturverlauf beim Sand (Außerdem dürften bei Materialien mit breitem Größenspektrum die Abweichungen in der "Grenzschicht" überhaupt kleiner sein).

Beim Dünger läßt sich das Diagramm für eine Meßzeit $t > 700$ s wohl verwerten. Die Resultate,

$$\begin{aligned}\lambda &= 0,219 \text{ W/mK,} \\ cp &= 7,5 \cdot 10^5 \text{ J/m}^3 \text{ K,} \\ a &= 2,9 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s.}\end{aligned}$$

sind vernünftig und stimmen mit anders gewonnenen überein.

Das Beispiel beleuchtet die Nützlichkeit der Forderung I, eine größere Anzahl von Meßwertepaaren (t, θ) zu verwerten. Nämhe man nur zwei, könnte man solche anomalen Fälle nicht erkennen und bekäme dann willkürliche Ergebnisse.

Anerkennungen—Die in diesem Artikel behandelten Versuche wurden in der Chemie Linz AG. (damals Österreichische Stickstoffwerke AG., Abteilung Verfahrenstechnik) ausgeführt. Der Verfasser dankt Herrn Prof. Dr. J. Priebisch für anregende Diskussionen und Frau Dr. A. Klingst für die Durchführung vieler numerischer Rechnungen.

LITERATUR

1. A. Huber, Eine Methode zur Bestimmung der Wärme- und Temperaturleitfähigkeit, *Mh. Math. Phys.* **41**, 35–42 (1934).
2. R. Roggen, Experimentelles zu einer neuen Methode zur Bestimmung der Wärme- und Temperaturleitfähigkeit, Dissertation Universität Freiburg, Schweiz (1940).
3. G. Herpol and N. Willems, Un nouvel instrument pour la mesure de la conductibilité thermique des matières isolantes, *Int. J. Heat Mass Transfer* **10**, 467–476 (1967).
4. J. A. Priebsch, Private Mitteilung. Eine den mathematischen Apparat der Kugelsonde betreffende Veröffentlichung ist beabsichtigt.
5. O. Krischer und H. Esdorn, Einfaches Kurzzeitverfahren zur gleichzeitigen Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit, der Wärmekapazität und der Wärmeeindringzahl fester Stoffe, *ForschHft. Ver. Dt. Ing.* **450**, 28–39 (1955).

PRACTICAL MEASUREMENTS OF THERMAL CONDUCTIVITY WITH SPHERICAL PROBE

Abstract—The thermal conductance of granular substances has been measured with a spherical probe. The experimental results have been evaluated by determining the parameters of linear functions. This method which can be employed graphically or numerically is easy to handle and provides a higher precision than the complicated procedures known so far. It also brings about a better estimation of the errors, and deviations from theoretical assumptions and their fundamentals are easier to discuss. The spherical probe as used in the experiments is described, and some results are presented.

MESURES PRACTIQUES DE CONDUCTIVITE THERMIQUE A L'AIDE D'UNE SONDE SPECIALE

Résumé—Des mesures de la conductance thermique de substances granuleuses ont été effectuées à l'aide d'une sonde sphérique et les résultats expérimentaux ont été déterminés par interpolation linéaire.

Cette méthode qui peut être utilisée par procédé graphique ou numérique est facile à mettre en oeuvre et fournit une meilleure précision que celles plus compliquées connues jusqu'à présent. Elle permet également d'obtenir une meilleure estimation des erreurs et les écarts par rapport aux hypothèses théoriques et leurs fondements sont plus faciles à discuter. On donne la description de la sonde utilisée dans les expériences et quelques résultats sont présentés.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ИЗМЕРЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ПОМОЩЬЮ СФЕРИЧЕСКОГО ЗОНДА

Аннотация—Методом сферического зонда была измерена теплопроводность зернистых материалов. Экспериментальные данные были выражены в виде линейных зависимостей. Этот метод достаточно прост и обеспечивает более высокую точность, чем известные методы, он пригоден как для графической, так и для численной оценки результатов. Этот метод позволяет произвести корректную оценку погрешности измерений и истолковать основные допущения, на котором он базируется. Приводится описание сферического зонда и некоторые результаты измерений.